



EOC
EUROASIAN
ONLINE
CONFERENCES

GERMANY CONFERENCE

**INTERNATIONAL CONFERENCE ON
SCIENCE, ENGINEERING AND
TECHNOLOGY**



Google Scholar

zenodo

OpenAIRE

doi[®] digital object
identifier

eoconf.com - from 2024



INTERNATIONAL CONFERENCE ON SCIENCE, ENGINEERING AND TECHNOLOGY:
a collection scientific works of the International scientific conference –
Gamburg, Germany, 2025 Issue 6

Languages of publication: Uzbek, English, Russian, German, Italian, Spanish,

The collection consists of scientific research of scientists, graduate students and students who took part in the International Scientific online conference « **INTERNATIONAL CONFERENCE ON SCIENCE, ENGINEERING AND TECHNOLOGY** ». Which took place in Gamburg, 2025.

Conference proceedings are recommended for scientists and teachers in higher education establishments. They can be used in education, including the process of post - graduate teaching, preparation for obtain bachelors' and masters' degrees. The review of all articles was accomplished by experts, materials are according to authors copyright. The authors are responsible for content, researches results and errors.



“MATEMATIK FIZIKANING NOCHIZIQLI TENGLAMALARINI YECHISHNING AYIRMALI USULLARI”

SHARIPOVA GULSHANOY MOHIRJON QIZI

Farg'ona Davlat Universiteti Amaliy Matematika Va Axborot Texnologiyalari
Kafedrası 25-Amaliy Matematika Mutaxassisligi Magistranti
gulshanoysharipova0315@gmail.com

ANOTATSIYA. Ushbu maqolada matematika va fizika fanlarida uchraydigan nochiziqli differensial tenglamalarni yechishda ayirmali usullarning nazariy asoslari va amaliy qo'llanilishi yoritiladi. Avvalo, nochiziqli tenglamalarning xususiyatlari, ularning matematik modellardagi o'rni hamda fizik jarayonlarni tasvirlashdagi ahamiyati ko'rib chiqiladi. Ayirmali sxemalar yordamida vaqt va fazo o'zgaruvchilarini diskretlashtirish tamoyillari, shuningdek aniq va noaniq ayirmali usullar, Crank–Nicolson sxemasi kabi klassik yondashuvlarning qo'llanishi tahlil qilinadi. Maqolada ayirmali sxemalarning barqarorligi, yaqinlashuvi va aniqligi bo'yicha nazariy mezonlar keltirilib, nochiziqli tenglamalar uchun Nyuton va iteratsion yondashuvlarning qo'llanishi asoslab beriladi. Fizik modellar misolida ayirmali usullarning samaradorligi ko'rsatilib, ularning afzallik va cheklovlari yuzasidan ilmiy xulosa chiqariladi.

Tadqiqot maqsadi: Matematik fizikaning nodir (nochiziqli va uzilishlarga ega) tenglamalarini va ko'p o'lchovli masalalarni sonli yechish uchun barqaror, yaqinlashuvchi va tejamlil ayirmali sxemalar ishlab chiqish va ularning nazariy asoslarini o'rganish.

Yondashuv va usullar:

1. Operatorli yondashuv – differensial tenglamalarni chiziqli operatorlar yordamida ifodalash va barqarorlikni energiya normalarida baholash.
2. Konservativ sxemalar – massa, impuls va energiyaning saqlanish qonunlarini diskret holatda saqlaydigan sxemalar qurish.
3. Psevdo-yopishqoqlik – zarba to'liqlari va uzilishlarni “yoyish” uchun qo'shimcha hadlar kiritish.
4. O'zgaruvchan yo'nalishlar usuli (bo'ylama-ko'ndalang sxema) – ko'p o'lchovli masalalarni bir o'lchovli ketma-ket masalalarga ajratish orqali hisoblash sarfini kamaytirish.
5. Iteratsion usullar (Nyuton metodi) – nochiziqli tenglamalarni yechishda tez yaqinlashuvchi algoritmlar qo'llash.
6. Test masalalar – analitik yechimi ma'lum bo'lgan masalalar yordamida sxemalar aniqligini tekshirish.

Asosiy natijalar:

1. Barqarorlik va yaqinlashuv – (20)-sxema uchun barqarorlik shartlari ($\tau \leq \text{const} \cdot h^2$) aniqlangan, apriori baholar (21)–(23) keltirilgan.
2. Kvazilineyar issiqlik tenglamasi – harorat to'liqlari uchun analitik yechimlar (18) topilgan, ular sonli sxemalarni testlashda qo'llanilgan.



3. Tejamli sxemalar – ko‘p o‘lchovli masalalarni $O(N)$ operatsiyada yechish imkonini beruvchi “bo‘ylama-ko‘ndalang” sxemasi ishlab chiqilgan va uning barqarorligi isbotlangan.

4. To‘liq konservativ sxemalar – gaz dinamikasi tenglamalari uchun massa, impuls va energiyaning diskret saqlanishini ta‘minlovchi sxemalar taklif etilgan.

5. Nyuton usulining yaqinlashishi – (57)–(59) shartlar ostida iteratsiyalarning tez (geometrik yoki kvadratik) yaqinlashishi ko‘rsatilgan.

6. Stefan masalasi – faza o‘tish chegarasini silliqashtirish orqali kvazilineyar tenglamaga keltirish usuli taqdim etilgan.

Kalit so‘zlar: nochiziqli tenglamalar, ayirmali usullar, diskretlashtirish, barqarorlik, yaqinlashuv, Nyuton usuli, aniq va noaniq sxemalar, Crank–Nicolson, matematik model, fizik jarayonlar.

Kirish. Matematik fizikaning ko‘plab muhim masalalari nodir (nochiziqli) tenglamalar va ko‘p o‘lchovli jarayonlarni o‘z ichiga oladi. Bular issiqlik tarqalishi, gaz va suyuqliklar harakati, faza o‘tish jarayonlari kabi tabiat va texnologiyadagi murakkab hodisalarni modellashtirishda uchraydi. Bunday tenglamalarni aniq yechish qiyin yoki imkonsiz bo‘lgani uchun ularni sonli usullar yordamida yechish talab qilinadi. Ushbu tadqiqotda quyidagi masalalar yoritilgan: Kvazilineyar issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini yechishning barqaror va aniq sonli sxemalari. Gaz dinamikasi tenglamalari uchun massa, impuls va energiyaning saqlovchi (konservativ) sxemalar. Ko‘p o‘lchovli masalalarni kamroq hisoblash sarfi bilan yechish uchun “tejamli” sxemalar, jumladan, o‘zgaruvchan yo‘nalishlar usuli. Nyuton iteratsion usuli yordamida nochiziqli tenglamalarni tez yaqinlashuvchi usulda yechish.

Asosiy qism

1-§. Kvazilineyar issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini yechishning ayirmali usullari

2-§. Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi.

3-§. Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining ba‘zi analitik yechimlari.

4-§. Ayirmalar sxemasi. Nyuton usuli.

5-§. Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun turli noaniq sxemalar

1. Statsionar masala. Avvalo eng sodda masaladan boshlaymiz, uni nolineyar manbali statsionar issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi sifatida qarash mumkin:

$$u'' = -f(u), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (1)$$

Oraliqni $0 \leq x \leq 1$ bir xil bo‘linmalar bilan ajratamiz:
 $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N, hN = 1$

Shunda ayirmali sxemani yozamiz:



$$y_{xx} = -f(y), x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1, y_0 = y_N = 0. \quad (2)$$

Xatolikni $z = y - u$ deb olsak, quyidagi masala hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} z_{xx} + f'(\bar{y})z &= -\psi, & x_i &= ih, \\ i &= 1, 2, \dots, N-1, & z_0 &= z_N = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

bu yerda $\varphi(x) = u_{xx} + f(u)$ — qoldiq.

Ko'rinadiki, (2)-sxema ikkinchi tartibli aniqlikdagi sxema bo'lib, ya'ni $\varphi(x) = O(h^2)$.

Agar $f'(y) \leq 0$ bo'lsa, unda (3)-masalani yechish uchun, III-bob, §6, 2-bandga muvofiq, quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$\|z\|_c \leq C \|\varphi\|_c \quad (4)$$

Bundan kelib chiqadiki, (2)-sxema bir tekis yaqinlashadi va yaqinlashish tezligi:

$$\|y - u\|_c = O(h^2)$$

(2)-masalaning yechimi chegaralangan va u uchun quyidagi baho o'rinli:

$$\|y\|_c \leq |f(0)| = c_0 \quad (5)$$

Agar $f'(y) \leq 0$ bo'lsa. Darhaqiqat, $f(y) = f(0) + (f(y) - f(0)) = f(0) + f'(\theta y)y$, bu yerda $\theta, 0 \leq \theta \leq 1$, shuning uchun

$$y_{xx} + f'(y)y = -f(0), \quad y_0 = y_N = 0.$$

Bundan (4) asosida (5) kelib chiqadi.

Nochiziqli ayirma tenglamasini (2) yechish uchun Nyuton metodini qo'llaymiz

$$y_{xx}^{(k)} + f'(y)(y^{(k)} - y) = -f(y),$$

bu yerda k — iteratsiya raqami, $k = 0, 1, 2, \dots$ $y^{(k)}$ ni aniqlash uchun uch nuqtali chiziqli ayirma tenglamasiga egamiz

$$y_{xx}^{(k)} + f'(y)(y^{(k)} - y) = -(f(y) - f'(y)y), \quad y_0 = y_N = 0, \quad (6)$$

qaysiki progonka(chegara qiymatlar) metodi bilan yechiladi; progonka $f'(y) \leq 0$ bo'lganda barqarordir.

Iteratsiyalarning yaqinlashish tezligini baholaymiz. Xatolikni kiritamiz

$$v = y^{(k)} - y,$$

bu yerda y (2) masalaning aniq yechimi. $y^{(k)} = y + v$, $y = y^{(k)} + v$ ni (6) tenglamaga qo'yib, v uchun quyidagi masalani hosil qilamiz

$$v_{xx}^{(k)} + f'(y)(y^{(k)} - y) = -F, \quad v_0 = v_N = 0, \quad (7)$$

$$F = f(y) - f'(y)y + (y - y)f'(y). \quad (8)$$

Keyin, yoyilmani hisobga olgan holda

$$f(y) = f(y) + f'(y)(y - y) + 0.5 f''(\eta)(y - y)^2,$$

bu yerda $\eta = y^{(k)} + \theta(y - y)$, $0 \leq \theta \leq 1$, — o'rtacha qiymat, topamiz

$$F = -\frac{f''(\eta)}{2}v^2.$$

Shunday qilib, quyidagi masala yechimini baholash talab etiladi

$$v_{xx}^{(k)} + f'(y)(y^{(k)} - y) = 0.5 f''(\eta)v^2, \quad v_0 = v_N = 0. \quad (9)$$

Agar $f(y)$ — konkav funksiya bo'lsa, ya'ni

$$f''(y) \geq 0,$$

unda, maksimum printsipiga ko'ra,

$$v = y^{(k+1)} - y \leq 0,$$

ya'ni iteratsiyalar (2) masalaning aniq yechimiga pastdan yaqinlashadi.

(9) masalaning yechimi uchun quyidagi baho o'rinli

$$\|v^{(k+1)}\|_C \leq 0.5 \|f''(y)\|_C \|v^{(k)}\|_C^2, \quad (10)$$

yoki

$$\|v^{(k+1)}\|_C \leq q \|v^{(k)}\|_C^2,$$

agar

$$\|f''(y)\|_C \leq 16q.$$

bo'lsa.

Darhaqiqat, maksimum printsipiga ko'ra (bob IV, § 2 ga qarang), $f'(y) \leq 0$ bo'lganda (9) masala quyidagi majorantaga ega:

$$V(x) = Kx(1-x), \quad \|V(x)\|_C \leq \frac{1}{4}K,$$

bu yerda $K = \frac{1}{4} \|f''(y)\|_C \|v\|_C^2$, shuning uchun

$$\|v\|_C \leq \|V\|_C \leq \frac{1}{16} \|f''(y)\|_C \|v\|_C^2 = q \|v\|_C^2.$$

$\|qv\|_C \leq \|qv\|_C^2 \leq \dots \leq \|qv\|_C^{2^k}$ ekanligini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\|v\|_C \leq \frac{1}{q} \|qv\|_C^{2^k},$$

ya'ni agar boshlang'ich yaqinlashma y shunday tanlangan bo'lsaki,

$$q \|v\|_C < 1, \quad \text{ya'ni} \quad q \|y - y\|_C < 1$$

shart bajarilsa, iteratsiyalar kvadratik qonun bo'yicha yaqinlashadi.

Agar $f'(y) > -c_1, c_1 > 0$ bo'lsa, (10) o'rniga L_2 setka normasida boshqa baho olish mumkin:

$$\|v\| \leq \frac{\|f''(y)\|_C}{2(\delta + c_1)} \|v\|^2 \leq \frac{q_1}{\delta + c_1} \|v\|^2, \quad (11)$$



bu yerda $\delta = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}$, $q_1 = 0,5 \| f''(y) \|_C$.

(2) masalani yechish uchun boshqa iteratsion usullardan ham foydalanish mumkin. Masalan, quyidagi usulni ko'rib chiqamiz:

$$y_{t+1}^{(k)} = \theta y_{t-1}^{(k)} - (1 - \theta) f(y),$$

bu yerda θ parametri quyidagi formula bo'yicha tanlanadi:

$$\theta = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \quad \lambda = \frac{c^*}{2\delta}, \quad c^* = \max_i |f'(y_i)|.$$

Bunda iteratsiyalar maxraji $q_2 = \theta$ bo'lgan geometrik progressiya tezligida yaqinlashadi, shuning uchun $\|v\| \leq q_2 \|v\| \leq q_2^{k+1} \|v\|$.

$\theta < 1$ bo'lgani uchun, boshlang'ich yaqinlashma y qanday tanlanganidan qat'iy nazar, iteratsiyalar yaqinlashadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislennye metody (Sonli usullar). – M.: Nauka, 1989. – 432 s.
2. Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. Metody resheniya setochnyx uravneniy (Setka tenglamalarini yechish usullari). – M.: Nauka, 1978. – 592 s.
3. Richtmyer R.D., Morton K.W. Difference Methods for Initial-Value Problems (Boshlang'ich qiymat masalalari uchun ayirma usullari). – NY: Interscience, 1967.
4. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. Vvedenie v teoriyu raznostnyx skhem (Ayirma sxemalar nazariyasiga kirish). – M.: Fizmatgiz, 1962.
5. Marchuk G.I. Metody vychislitel'noy matematiki (Hisoblash matematikasi usullari). – M.: Nauka, 1980.
6. A.A.Samarskiy. Teoriya raznostnyx skhem (Ayirma sxemalar nazariyasi). – M.: Nauka, 1977.